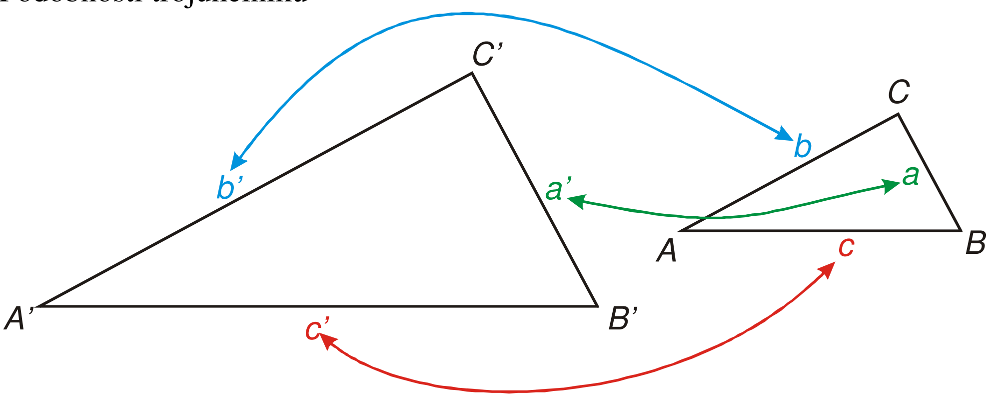
11.2.21 Obvody a obsahy obrazců I

Předpoklady:

Shrnutí:

Pythagorova věta: $c^2 = a^2 + b^2$

Podobnosti trojúhelníků



Možno zapsat různými způsoby:

- $c' = k \cdot c$, $a' = k \cdot a$, $b' = k \cdot b$ (u všech odpovídajících stran je stejný poměr velikostí)
- $\frac{c'}{c} = \frac{b'}{b} = \frac{a'}{a} = k$ (u všech odpovídajících stran je stejný poměr velikostí)
- $\frac{c'}{b'} = \frac{c}{b}$, $\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a}$, $\frac{c'}{a'} = \frac{c}{a}$ (odpovídající strany v jednom trojúhelníku mají stejný poměr velikostí – z toho vychází definice goniometrických funkcí).

Obsahy a obvody:

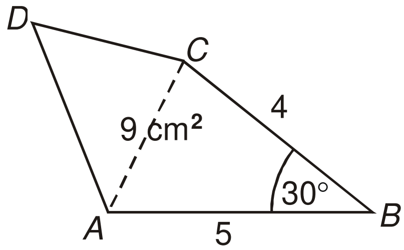
Trojúhelník	$o = a + b + c$	$S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$
Čtverec	$o = 4a$	$S = a^2$
Obdélník	$o = 2(a+b)$	$S = ab$
Rovnoběžník	$o = 2(a+b)$	$S = a \cdot v_a = b \cdot v_b$
Lichoběžník	$o = a + b + c + d$	$S = \frac{(a+c)v}{2}$
Kruh	$o = 2\pi r$	$S = \pi r^2$

Př. 1: Ve čtyřúhelníku $ABCD$ o obsahu $9\ \text{cm}^2$ platí, $|AB| = 5\ \text{cm}$, $|BC| = 4\ \text{cm}$, $|\sphericalangle ABC| = 30°$. Jaký je obsah trojúhelníku ACD? **2 body**

A) menší než 3 cm B) $\frac{5\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^2$ C) $4\ \text{cm}^2$

D) $3\sqrt{2}\ \text{cm}^2$ E) větší než $4{,}5\ \text{cm}^2$

Náčrtek situace:



Na první pohled se situace zdá neřešitelná. O trojúhelníku ACD nevíme prakticky nic, mohli bychom spočítat pouze délku strany AC z trojúhelníku ABC (kde naopak známe tři údaje a trojúhelník je tedy určen).
Nápad: Známe obsah celého čtyřúhelníku $ABCD$. Můžeme tedy spočítat obsah trojúhelníku ABC a ten odečíst od obsahu celého čtyřúhelníku $ABCD$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} c \cdot a \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \sin 30° \text{ cm}^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \text{ cm}^2 = 5 \text{ cm}^2$$

$S_{ACD} = S_{ABCD} - S_{ACB} = 9 - 5 \text{ cm}^2 = 4 \text{ cm}^2 \Rightarrow$ správná odpověď C).

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je opakování trigonometrie.

Pedagogická poznámka: Příklad je hezkou ukázkou v kombinatorice používaného postupu, když nemůžu spočítat to, co chci, spočítám to, co nechci, a odečtu to od všeho.

Př. 2: Jedna strana obdélníku je o pět devítin kratší než jeho druhá strana. Obsah tohoto obdélníku je stejný jako obsah čtverce o straně a. Vyjádři délky stran obdélníku v závislosti na veličině a. **1 bod**

Delší strana obdélníku … x

Kratší strana je o pět devítin kratší … $y = x - \frac{5}{9}x = \frac{4}{9}x$

Obsah obdélníku … $S = ab = x \cdot \frac{4}{9}x = \frac{4}{9}x^2$

Obsah čtverce o straně a … $S = a^2$

Obsahy čtverce a obdélníku se rovnají … $a^2 = \frac{4}{9}x^2$

Vyjádříme x: $x^2 = \frac{9}{4}a^2$

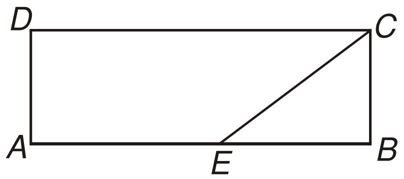
$x = \sqrt{\frac{9}{4}a^2} = \frac{3}{2}a$ (zajímá nás pouze kladné řešení, délka strany obdélníku nemůže být záporná)

Kratší strana .. $y = \frac{4}{9}x = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2}a = \frac{2}{3}a$

Strany obdélníku mají délky $\frac{3}{2}a$ a $\frac{2}{3}a$.

Pedagogická poznámka: Naprostá většina problémů se objevu v zápisu délky kratší strany $y = x - \frac{5}{9}$. Někteří studenti si pak sami nastraží past tím, že zvolí pro délku delší strany obdélníku písmeno a.

Př. 3: Obdélník *ABCD* je úsečkou *EC* rozdělen na pravoúhlý trojúhelník *EBC* a lichoběžník *AECD*. Delší strana obdélníku *AB* je třikrát větší než kratší strana *BC*. Bod *E* dělí stranu *AB* na dvě úsečky, jejichž délky jsou v poměru $|AE|:|EB| = 5:4$.
Vypočti a zapiš v základním tvaru poměr délek obou odvěsen trojúhelníku *EBC*.
Urči poměr obsahu trojúhelníku *EBC* a obsahu lichoběžníku *AECD*.
Obsah obdélníku *ABCD* je $108\ \text{cm}^2$. Urči obvod lichoběžníku *AECD*. **max. 3 body**

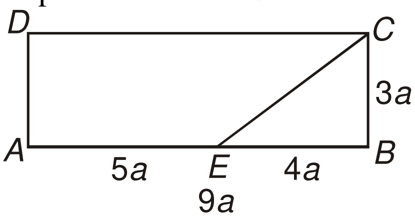


Poměr délek obou odvěsen trojúhelníku *EBC*

Bod *E* dělí stranu *AB* na dvě úsečky v poměru $|AE|:|EB| = 5:4 \Rightarrow$ stranu *AB* je výhodné rozdělit na 9 dílů, tedy $|AB| = 9a$, $|AE| = 5a, |EB| = 4a$.

Delší strana obdélníku *AB* je třikrát větší než kratší strana *BC* $\Rightarrow$ pokud strana *AB* bude mít délku $9a$, platí $|BC| = 3a$.

Doplníme tato označení do obrázku a začneme odpovídat na otázky.



Poměr délek obou odvěsen trojúhelníku *EBC*: $|EB|:|BC| = 4a:3a = 4:3$

Poměry obsahů

$S_{EBC} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}4a \cdot 3a = 6a^2$ (trojúhelník je pravoúhlý)

$S_{ABCD} = ab = 9a \cdot 3a = 27a^2$

$S_{AECD} = S_{ABCD} - S_{EBC} = 27a^2 - 6a^2 = 21a^2$

Urči poměr obsahu trojúhelníku *EBC* a obsahu lichoběžníku *AECD*:

$S_{EBC} : S_{AECD} = 6a^2 : 21a^2 = 2:7$

Obvod lichoběžníku *AECD*

Určení délky strany *EC* z trojúhelníku *EBC*: $|EB|^2 + |BC|^2 = |EC|^2$

$(4a)^2 + (3a)^2 = 16a^2 + 9a^2 = 25a^2 = |EC|^2$

$|EC| = \sqrt{25a^2} = 5a$ (hledáme pouze kladné řešení, délka strany nemůže být záporná)

Z obsahu obdélníku *ABCD* můžeme určit délku dílu *a*.

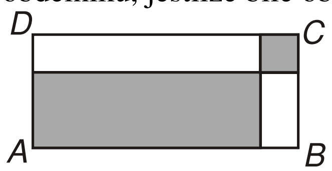
$S_{ABCD} = 27a^2 = 108 \quad / : 27$

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$ (opět nás zajímá pouze kladné řešení, délka strany nemůže být záporná)

Obvod lichoběžníku:

$o_{AECD} = |AE| + |AC| + |CD| + |DA| = 5a + 5a + 9a + 3a = 22a = 22 \cdot 2\text{ cm} = 44\text{ cm}$

Př. 4: Obdélník *ABCD* je dvě úsečkami, které jsou rovnoběžné s jeho stranami rozdělen na malý šedý čtverec, menší šedý obdélník a dva menší bílé obdélníky. Urči obsah obdélníku, jestliže bílé obdélníky mají obvody 22 cm a 16 cm. **1 bod**



Označíme si $|AB| = a$, $|BC| = b$, strana malého šedého čtverce *x*.

Pro obvod většího bílého obdélníku platí:

$22 = 2(a - x) + 2 \cdot x = 2a - 2x + 2x = 2a \Rightarrow a = 11\text{ cm}$

Pro obvod menšího bílého obdélníku platí:

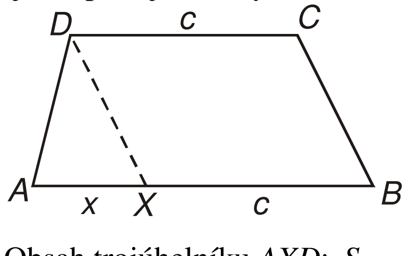
$16 = 2(b - x) + 2 \cdot x = 2b - 2x + 2x = 2b \Rightarrow b = 8\text{ cm}$

Obsah obdélníku *ABCD*: $S = ab = 11 \cdot 8\text{ cm}^2 = 88\text{ cm}^2$

Pedagogická poznámka: Rovnost $22 = 2a$ je možné získat i bez použití rovnice. Stačí si uvědomit, že delší straně většího bílého obdélníku zbývá do délky *a* stejná vzdálenost, jakou představuje jeho kratší strana. Podobně je možné získat z menšího bílého obdélníku délku strany *b*.

Př. 5: Lichoběžník *ABCD* se základnou *AB*, na které leží bod *X*, rozděluje úsečka *XD* na trojúhelník *AXD* a rovnoběžník *XBCD*. V jakém poměru dělí bod *X* úsečku *AB*, jestli obsah lichoběžníku *ABCD* je pětkrát větší než obsah trojúhelníku *AXD*? **1 bod**

Délku úsečky *AX* si označíme *x*, úsečka *XB* má velikost shodnou s velikostí úsečky *CD*, tedy *c* (jde o protější strany rovnoběžníku). Výška lichoběžníku i trojúhelníku *AXD* je *v*.



Obsah trojúhelníku *AXD*: $S_{AXD} = \frac{1}{2} a v_a = \frac{1}{2} x v$.

Obsah lichoběžníku *ABCD*: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(a + c)v = \frac{1}{2}(x + c + c)v = \frac{1}{2}(x + 2c)v$.

obsah lichoběžníku *ABCD* je pětkrát větší než obsah trojúhelníku *AXD*:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{AXD}} = \frac{5}{1} = \frac{\frac{1}{2}(x+2c)v}{\frac{1}{2}xv}$$

$$5 = \frac{x+2c}{x} \qquad / \cdot x$$

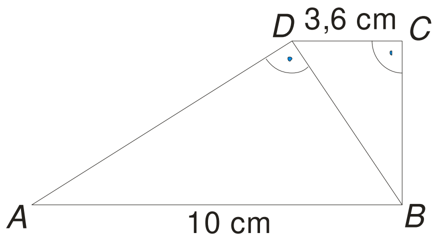
$$5x = x + 2 \qquad / -x$$

$$4x = 2c \qquad / : 4$$

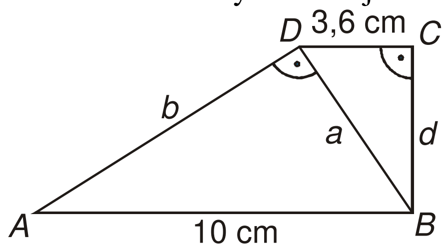
$$x = \frac{c}{2}$$

Úsečka *XB* je dvakrát delší než úsečka *AX* $\Rightarrow$ bod *X* dělí úsečku *AB* v poměru 1:2.

Př. 6: Pravoúhlý lichoběžník *ABCD* s pravých úhlem u vrcholu *C*, rozděluje úhlopříčka *BD* na dva trojúhelníky. Trojúhelník *ABD* je také pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu *D*. Vypočti obsah a obvod lichoběžníku, jestliže jsou dány délky obou základen $|AB| = 10\text{ cm}$, $|CD| = 3{,}6\text{ cm}$. **max. 2 body**



Označíme si strany obou trojúhelníků, jejichž délky neznáme.



Trojúhelníky *ABC* a *BDC* jsou si podobné. (pokud označíme úhel *DAB* jako α, pak platí, že úhel *ABD* má velikost $90-\alpha$ a úhel *DBC* pak musí mít také velikost α, protože úhel *ABC* je pravý.

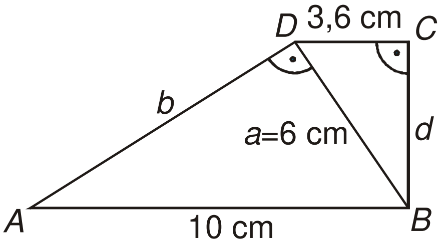
Zapíšeme podobnost mezi trojúhelníky pomocí poměru přepony a kratší odvěsny (u trojúhelníku *ABC* známe přeponu, u trojúhelníku *BDC* kratší odvěsnu).

$$\frac{\textit{kratší odvěsna}}{\textit{přepona}} = \frac{a}{10} = \frac{3{,}6}{a}$$

Z rovnice je možné vypočítat *a*: $\frac{a}{10} = \frac{3{,}6}{a} \qquad / \cdot 10a$

$$a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$$

Doplníme do obrázku:



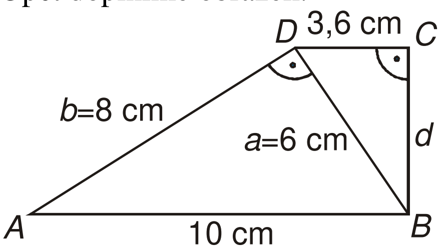
Stranu b určíme pomocí Pythagorovy věty_

$$6^2 + b^2 = 10^2 \qquad / -36$$

$$b^2 = 100 - 36 = 64$$

$$b = 8$$

Opět doplníme obrázek:

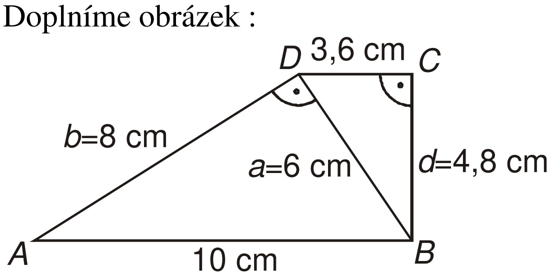


Stranu d určíme opět pomocí poměru (šlo by použít i Pythagorovu větu).

$$\frac{\textit{delší odvěsna}}{\textit{přepona}} = \frac{8}{10} = \frac{d}{6} \qquad / \cdot 6$$

$$d = \frac{8 \cdot 6}{10} = 4{,}8 \text{ cm}$$

Doplníme obrázek :



$$o = a + b + c + d = 10 + 4{,}8 + 3{,}6 + 8 \text{ cm} = 26{,}4 \text{ cm}$$

$$S = (a + c) \cdot v = \frac{(10 + 3{,}6) \cdot 4{,}8}{2} \text{ cm}^2 = 32{,}64 \text{ cm}^2$$

Shrnutí: